Računarska grafika

Bezjeove krive

Bezjeove krive

- Bezjeova kriva – funkcija u parametarskom obliku

- Koristi se za modelovanje glatkih krivih linija

- Priroda - krivolinijski segment
  - između 2 zadate krajnje tačke
    - krajnje tačke pripadaju krivoj
  - kontrolisan proizvoljnim brojem kontrolnih tačaka
    - kontrolne tačke “privlače” liniju, linja ne prolazi kroz njih

- Kriva se zadaje vektorski (nizom kontrolnih tačaka)
  - kontrolne tačke – krajnje i privlačeće
  - pogodnost za skaliranje i druge geometrijske transformacije

Primena Bezjeovih krivih

- Atraktivan metod crtanja krivih za različite aplikacije
  - projektantski CAD i CAM alati
  - editori vektorskih (takozvanih *True Type*) fontova
  - grafički dizajnerski programi (npr. *Inkscape*, *Adobe Photoshop*)

- Koriste ih i formati za opis vektorske grafike
  - *Scalable Vector Graphics* (SVG)
  - *OpenType* fontovi (ttf/otf)

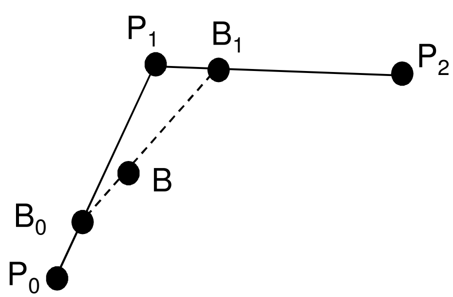
- Koriste ih grafički paketi (API-ji)
  - *JavaFX*

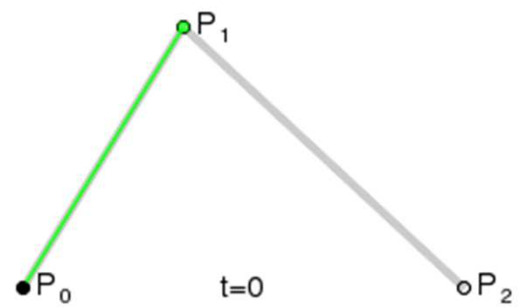
Istorijat

- Automobilska industrija – glavni pokretač razvoja crtanja krivih linija i površi na računaru
- Algoritam crtanja razvio Pol d Kastelžo (*Paul de Casteljau*) 1959.
  - radio za Sitroen (*Citroën*),
  - objavio tek 1975. godine
- Nezavisno – algoritam razvio Pijer Bezje (*Pierre Bézier*), 1962
  - radio za Reno (*Renault*)
  - algoritam nazvan po njemu, jer ga je prvi publikovao
- Algoritam koristi Bernštajnove (*Bernstein*) polinome
  - Bernštajnovi polinomi su poznati od 1912. godine

Kvadratna Bezjeova kriva

- Tri kontrolne tačke ukupno: P_0, P_1, P_2 (čine kontrolni mnogougao)
  - samo jedna kontrolna privlačeća tačka P_1
- Kriva se definiše se kao geometrijsko mesto tačaka B
  - B je linearna interpolaciju između dve tačke B_0 i B_1
  - B_0 je linearna interpolacija između P_0 i P_1
  - B_1 je linearna interpolacija između P_1 i P_2

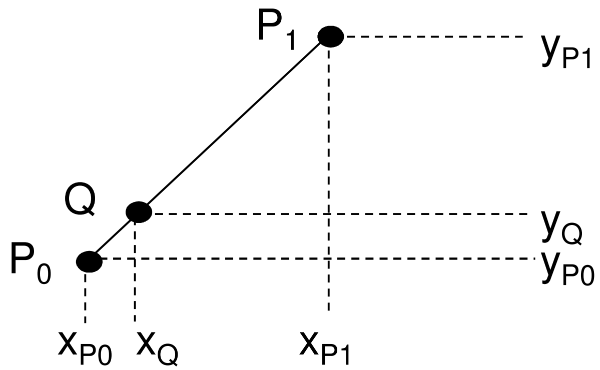


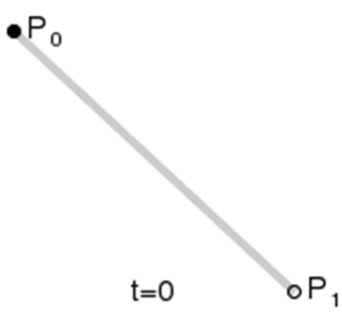


By Phil Tregoning - Created using ImageMagick

Izvođenje – linearna interpolacija

- Posmatra se pravolinijski segment P_0 i P_1 i tačka Q na njemu:





By Phil Tregoning - Created using ImageMagick

- U (skalarnom) parametarskom obliku:
  $x_Q(t) = x_{P0} + t \cdot (x_{P1} - x_{P0}) = t \cdot x_{P1} + (1-t) \cdot x_{P0}$
  $y_Q(t) = y_{P0} + t \cdot (y_{P1} - y_{P0}) = t \cdot y_{P1} + (1-t) \cdot y_{P0}$
- Parametar *t* predstavlja udeo duži P_0Q u duži P_0P_1 ; $t \in [0,1]$
- U vektorskom parametarskom obliku:
  $Q(t) = t \cdot P_1 + (1-t) \cdot P_0$, za $t \in [0,1]$

Izvođenje za kvadratnu krivu

- Ako su:
  - P_0 vektor početne tačke (x_0, y_0) krive
  - P_1 vektor kontrolne privlačeće tačke (x_1, y_1)
  - P_2 vektor krajnje tačke (x_2, y_2) krive
- Interpolirane tačke $B_0(t)$ na duži P_0P_1 i $B_1(t)$ na duži P_1P_2 su:

$$B_0(t)=t \cdot P_1 + (1-t) \cdot P_0 \text{ , za } t \in [0,1]$$
$$B_1(t)=t \cdot P_2 + (1-t) \cdot P_1 \text{ , za } t \in [0,1]$$

- Interpolacijom između B_0 i B_1 dobija se tačka B na Bezjeovoj krivoj:

$$B(t) = t \cdot B_1 + (1-t) \cdot B_0$$
$$B(t) = t \cdot [t \cdot P_2 + (1-t) \cdot P_1] + (1-t) \cdot [t \cdot P_1 + (1-t) \cdot P_0]$$
$$B(t) = (1-2t+t^2) \cdot P_0 + (2t-2t^2) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$$

$$\boxed{B(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2t(1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 \text{, za } t \in [0,1]}$$

Matrični oblik kvadratne krive

- Vektorski oblik:

  $B(t) = (1-\ t)^2 \cdot P_0\ + 2t(1-\ t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$, za $t \in [0,1]$

- Matrični oblik:

$$B(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t+t^2 & 0+2t-2t^2 & 0+0t+t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Kubna Bezjeova kriva

- U vektorskom parametarskom obliku:

$B(t) = (1- t)^3 \cdot P_0 + 3t(1- t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1- t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$, za $t \in [0,1]$

- U matričnom obliku:

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Bezjeova kriva n-tog stepena

- Bezjeova kriva proizvoljnog stepena u vektorskom obliku:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i, \quad t \in [0,1]$$

ili:

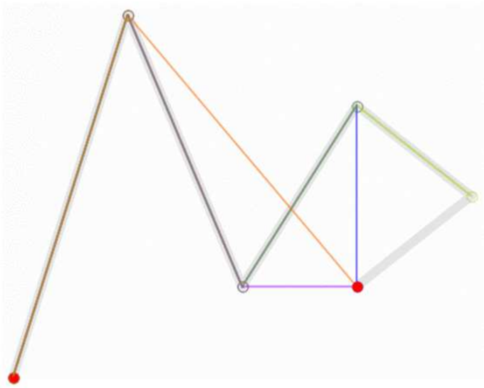
$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0,1]$$

gde je $b_{i,n}(t)$ Berštajnov polinom n-tog stepena:

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

a $\binom{n}{i}$ binomni koeficijent: $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$

kriva 5. stepena



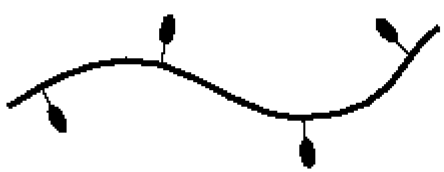
By Sam Derbyshire
at the English language Wikipedia,

Osobine

- Neprekidna, glatka kriva (diferencijabilna u svakoj tački)
- Na izgled krive utiču sve kontrolne tačke
- Početna i završna ivica kontrolnog mnogougla – tangente na krivu
  - prva ivica je tangenta na krivu u prvoj tački mnogougla P_0
  - poslednja ivica je tangenta na krivu u poslednjoj tački mnogougla P_n
- Kod kvadratne krive
  - tangente u početnoj P_0 i krajnjoj tački P_2 se seku u kontrolnoj tački P_1
  - kriva predstavlja segment parabole
- Kriva je unutar konveksnog omotača (*convex hull*) kontr. mnogougla
- Kriva može da se podeli na proizvoljno mnogo segmenata
  - od kojih je svaki Bezjeova kriva
- Kriva je prava ako i samo ako su sve kontrolne tačke kolinearne
- Generalizacija – Bezjeove površi

Splajnovi

- Splajn (*spline*) - kriva linija sastavljena iz polinomijalnih segmenata
  - kriva je glatka i na spojevima segmenata
  - oblikom se upravlja na osnovu kontrolnih tačaka i čvorova
- Naziv “splajn” - dugačka savitljiva šipka
  - za crtanje krivih linija na crtežima u prirodnoj veličini u brodogradnji
  - šipka se savija i u određenim tačkama fiksira "olovnim patkama" (*lead duck*)



- Kontrolna tačka – tačka privlačenja krive linije (u načelu - van linije)
- Čvor (*knot*) – tačka na osi parametra *t*
  - u kojoj počinje/prestaje uticaj pojedine kontrolne tačke
- Promena kontrolne tačke utiče lokalno na izgled krive

Vrste splajnova

- Kontinuitet krive u tački spoja
  - C1–prvi izvod kontinualan, nema „preloma“
  - C2 – drugi izvod kontinualan – kriva ima kontinualnost krivine
- Kubni B-splajn
  - sekvenca Bezjeovih krivih glatko nadovezanih u čvorovima (tačkama spojeva)
  - kriva ima C2 kontinuitet
- Katmul-Romov splajn
  - prolazi kroz sve kontrolne tačke
  - neprekidna, glatka kriva, kontinuitet C1